3. Inferência e estimativa de parâmetros (MAP214) (entrega 20 de maio 2004)

27th April 2004

1) Considere uma moeda especial que sera jogada de forma a bater em vários objetos antes de cair. Especial quer dizer que nao temos certeza se ela é honesta, pois foi comprada em um cassino. Introduzimos um parâmetro h que mede a honestidade de forma que se $h = 1/2$ a moeda será dita honesta. Se $h = 0$ só obteremos caras e se $h = 1$ só obteremos coroas, isto é h é a probabilidade de que saia uma coroa . Associamos à face uma variável s que toma valores ± 1, i.e $s_k = 1$ (resp. -1) se na k-ésima jogada o resultado for uma cara (resp. coroa). No arquivo de dados www.fge.if.usp.br/˜nestor/moeda.dat se encontram os resultados de uma sequência de jogadas˙Seu objetivo é estimar h. A distribuição posterior de h é

$$P(h|D_n, I) = \frac{1}{N_{norm}} P(h, I) P(D_n|h, I)$$

onde I inclui toda a informação sobre a moeda e a forma como será jogada. D_n inclui os primeiros n valores de s no arquivo de dados. Para a verossimilhança é razoável adotar a forma (não normalizada)

$$P(D_n|h, I) \propto h^l (1 - h)^{n-l}.$$

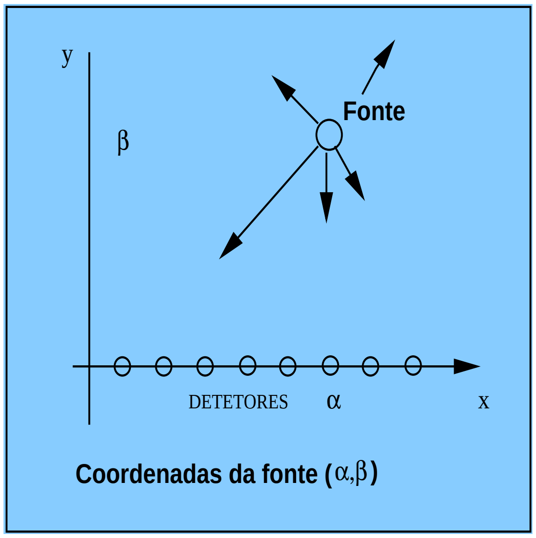
Considere três diferentes possibilidades para a distribuição a priori $P(h, I)$: (I) uniforme, que atesta total ignorância antes de ver os dados, (II) proporcional a $exp(-(h - .5)^2)/2$ que denota confiança na honestidade da moeda e (III) proporcional a: $\varepsilon + (x - 0.5)^4$ que demonstra desconfiança, $\varepsilon = 0.01$.

(a) Para $n = 0, 1, 2, 5, 10, 100, 1000, 10000$ jogadas faça o gráfico do logaritmo da posterior como função de h (apresente estas curvas no mesmo gráfico de forma que o maximo seja igual a 1, i.e. divida todos os pontos pelo valor do máximo). (2ptos)

(b)Do gráfico obtenha o valor mais provável h_n e a largura a meia altura Δh_n para cada n. Faça um gráfico log-log. Qual é a lei de evolução de Δh_n com n?(2ptos)

2) Considere uma fonte que emite pulsos de luz em direções aleatórias no plano horizontal e um arranjo de sensores dispostos sobre uma reta, como mostra a figura ao lado. A coordenada $y = \beta = 2.$ é conhecida, enquanto que a abcissa

a posição ao longo do eixo x, que chamaremos α não é conhecida e será o objeto de nosso estudo. É dado o conjunto de medidas das posições $\{x_i\}$dos sensores que detetaram um pulso no arquivo www.fge.if.usp.br/~nestor/cauchy.dat.



a única mudança que faremos em relação ao item anterior é que a verossimilhança será

$$logP(D|\alpha\beta) = \sum_{i=1,..n} log(\frac{1}{\pi}\frac{\beta}{\beta^2 + (x_i - \alpha)^2})$$

(2a) Mostre que esta é uma boa escolha, dado que os ângulos θ_i de emissão são independentes, igualmente distribuidos de maneira uniforme entre os valores mínimo e máximo detectáveis $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. (parta de $P(x)dx = P(\theta)d\theta$) (1pto)

(2b) Faça os mesmos gráficos que na primeira parte do problema (log da distribuição posterior). Coloque também no gráfico os valores da médias empíricas de x dadas por $\overline{x_n} = \sum_{i=1,...n} x_i/n$. Note que estas médias não são bons estimadores da posição da fonte. (2Ptos)

(2d) Faça um gráfico da medida empirica da variança $\sigma_n = \overline{x_n^2} - \overline{x_n}^2$ (1pto)

(2e) Estime as larguras da posterior a meia altura. Note que meia altura numa escala logaritmica quer dizer que voce deve procurar os valores da abcissa onde a função tem um valor igual ao do máximo menos $log2$. (1pto)

(2c) Faça um gráfico da estimativa para α contra n baseado no máximo da distribuição posterior com as barras de erro determinadas no item anterior (1pto)